

Lycée Kheniss	Devoir de contrôle N°2	Prof : *****
	Mathématiques Durée : 2h	4 <sup>ème</sup> Sc 2

### **Exercice n°1 (3pts)**

Répondre par vrai ou faux :

- 1) Soit A, B et C sont trois points du plan.
  - 0.5 a) Si A, B et C sont trois points alignés alors  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
  - 0.5 b) L'aire du triangle ABC est  $\frac{1}{6} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$
- 2) Soit  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé direct de l'espace. On a alors :
  - 0.5 a)  $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$
  - 0.5 b)  $(\vec{i} \wedge \vec{j}) \cdot \vec{k} = 0$
- 3) Soit A et B deux points distincts de l'espace.
  - 0.5 a) L'ensemble des points M de l'espace vérifiant  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  est une sphère
  - 0.5 b) L'ensemble des points M de l'espace vérifiant  $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$  est une droite.

### **Exercice n°2 (7pts)**

L'espace  $(\xi)$  est rapporté à un repère orthonormé direct  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points A(3, 2, 6), B(1, 2, 4) et C(4, -2, 5)

- 1) a - Déterminer  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ 
  - 0.5 b - En déduire que A, B et C définissent un plan P.
  - 0.5 c - Vérifier que l'équation de ce plan est :  $2x + y - 2z + 4 = 0$ .
- 0.5 2) a - Montrer que le triangle ABC est rectangle.
  - 0.5 b - Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite  $\Delta$  passant par O et perpendiculaire à P.
  - 0.5 c - Soit K le projeté orthogonal de O sur le plan P. Calculer la distance OK.
  - 1 d - Calculer le volume du tétraèdre OABC.
- 3) Soit I le point de l'espace définie par  $3\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$  et G le centre de gravité de ABC.
  - 0.5 a - Montrer que I est le milieu du segment [OG].
  - 0.5 b - Vérifier que  $d(I, P) = 2/3$ .

4) Soit  $S = \{ M \text{ de l'espace } \xi \text{ vérifiant } \|\overrightarrow{3MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 5 \}$

- 1 a - Montrer que S est une sphère.  
0.5 b - Etudier la position de S et du plan P.

### **Exercice n°3 (4pts)**

Soit  $g(x) = \tan x + (\tan x)^3$ ,  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

- 0.5 1) a) Dériver la fonction  $U : x \mapsto \tan x$   
1 b) Déterminer les primitives de  $g$  sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

2) Soit  $f : x \mapsto \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

- 0.5 a) Déterminer  $D_f$ .  
0.5 b) Vérifier que pour tout  $x \in D_f$ ,  $f(x) = 2x^2 - 2x\sqrt{x^2 - 1}$   
0.5 c) Montrer que  $f$  admet des primitives sur  $]-\infty, -1[$ .  
1 d) Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  sur  $]-\infty, -1[$  telle que  $F(-2) = 2/3$ .

### **Exercice n°4 (6pts)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par  $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$ . Soit  $(\zeta)$  sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

- 1 1) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu  
0.5 b) Prouver que  $f$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et calculer  $f'(x)$ .  
0.5 2) a) Dresser le tableau de variation de  $f$   
0.5 b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter le résultat obtenu.  
0.5 c) Tracer  $(\zeta)$   
0.5 3) a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[1, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera. (On note  $f^{-1}$  la fonction réciproque de  $f$ ).  
0.5 b) Déterminer le domaine de continuité de  $f^{-1}$  et son sens de variation.  
0.5 c) Calculer  $f^{-1}(3)$ .  
0.5 d) Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable en 3 et calculer  $(f^{-1})'(3)$ .  
0.5 e) Ecrire une équation cartésienne de la tangente  $T$  à la courbe  $(\zeta')$  de  $f^{-1}$  au point d'abscisse 3.

0.5 f) Tracer  $(\zeta')$  dans le même repère que  $(\zeta)$